EXERCICE N°1 : | 45' | 6 points

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=e^x\sqrt{e^x-1}$.

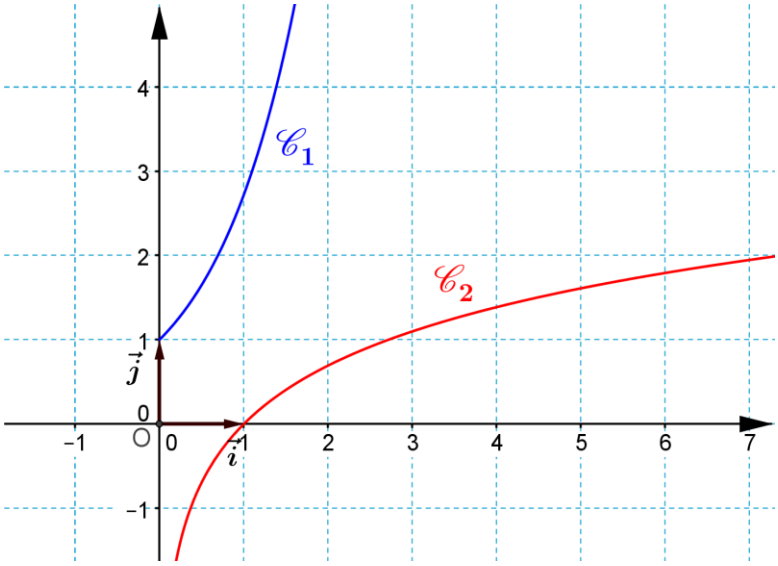
On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter le résultat graphiquement.

2°) Dresser le tableau de variation de f.

3°) Dans la figure ci-dessous on a représenté

$\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ les courbes respectives des fonctions $x\mapsto e^x$ et $x\mapsto \ln x$.



a) Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_1$.

b) Tracer $\mathscr{C}_f$.

4°) a) Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle J à préciser.

b) Construire dans le même repère la courbe $\mathscr{C}'$ de la fonction réciproque de f.

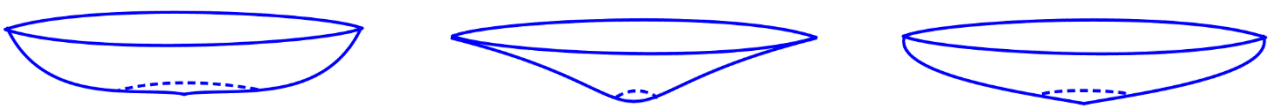
c) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les courbes $\mathscr{C}'$, $\mathscr{C}_2$ et l'axe des abscisses.

5°) L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit Γ la courbe de la restriction de f à $[0,\ln 2]$.

Γ est la solide de révolution obtenu en faisant tourner Γ autour de l'axe $(O,\vec{i})$.

a) Préciser parmi les solides suivants celui qui correspond à (S).



(I) **(II)** **(III)**

b) Calculer le volume de (S).

EXERCICE N°2 :	55'	6 points	

On considère pour tout entier naturel non nul n la fonction f_n définie sur $]-1,+\infty[$ par $f_n(x)=\dfrac{e^x}{(1+x)^n}$.

On désigne par C_n sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

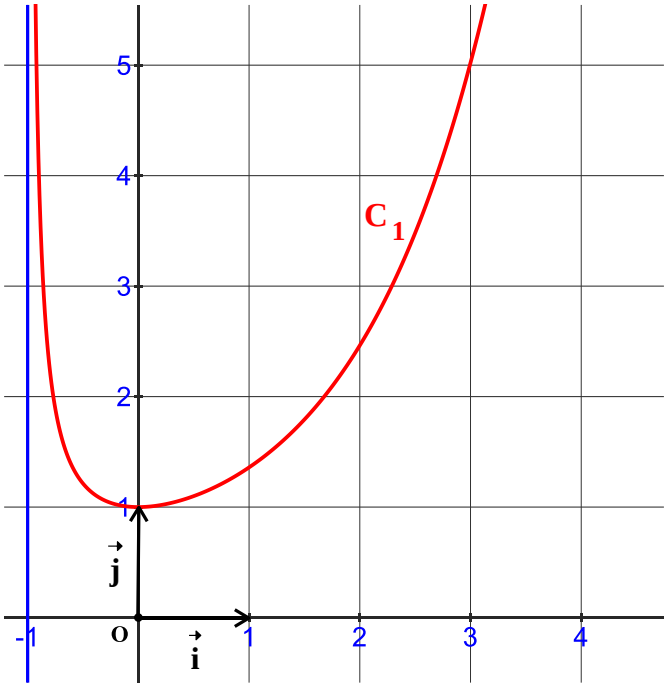
1°) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=+\infty$

b) Etudier les variations de f_n et montrer que f_n admet un minimum égal à $U_n=\dfrac{e^{n-1}}{n^n}$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

2°) a) Etudier les positions relatives de C_n *et* C_{n+1}.

b) Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $U_{n+1}=\dfrac{f_n(n)}{n+1}$.

c) Utiliser C_1 tracée ci-contre pour construire la tangente horizontale de C_2 qu'on tracera .



3°) Pour tout entier naturel non nul *n*, on pose

$I_n=\int_0^1 f_n(x)dx$.

a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et qu'elle est convergente.

b) Exprimer $f_n'(x)$ en fonction de $f_n(x)$ *et* $f_{n+1}(x)$.

c) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, *on a* $I_n=nI_{n+1}-1+\dfrac{e}{2^n}$.

4°) a) Calculer l'aire de la partie $\mathcal{D}$ délimitée par C_1 *et* C_2 et les droites d'équations $x=0$ *et* $x=1$.

b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$, $I_n\le\dfrac{e}{n-1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.